

神戸大学大学院システム情報学研究科「大規模シミュレーション総論II」

分野2<新物質・エネルギー創成>

藤堂眞治 <wistaria@issp.u-tokyo.ac.jp> 東京大学物性研究所 計算物質科学研究センター(CCMS) 神戸分室



講義資料: http://todo.issp.u-tokyo.ac.jp/ja/lectures

CMSI神戸拠点 & CCMS神戸分室



AICS R501

常駐スタッフ:藤堂、北浦、坂下、Avramov 山下、松下

理研計算科学研究機構 (AICS)



CMSI神戸拠点 & CCMS神戸分室

• 配信講義

- ・CMSI計算科学技術特論、人材育成シンポジウム、他
- アプリケーション講習会
 - ・分野共通アプリケーション(FMO、xTAPP、ALPS他)、ツール(git)など
- ・アプリ高度化コンサルティング
 - コードの詳細情報を共有し、実際にその場でコードやプロファイラの結果を見ながら、コンサルティングを行う
- ・データポスト処理システム phi
- ・セミナー・研究会
 - 「京」物性セミナー、他
- ・ミーティングスペース、ワークスペース



HPCI戦略プログラム SPIRE:戦略5分野



講義内容

- ・HPCI戦略プログラム分野2 <新物質・エネルギー創成> CMSIについて
- ・物質科学(物性物理)におけるシミュレーションと代表的アルゴリズム
- ・モンテカルロ法の基礎と応用
- ・ソフトウェアの開発と普及



CMSIが「京」を用いて現在進めている課題

- ・高温超伝導物質のしくみの解明
- ・超高精度電子状態計算新手法の開発
- ・電子の波動性を考慮した次世代半導体設計手法の開発
- ・感染予防につながるウイルスの営みの解明
- ・電池寿命を向上させる電極・電解液反応機構の解明
- 日本海溝に眠るメタンハイドレートの効率的利用
- ・社会を支える固くてしなやかな金属構造材料の開発





重点課題代表者に聞く

電子状態・動力学・熱揺らぎの融和と 分子論の新展開

話し手: 天能精一郎 てんのう せいいちろう 神戸大学大学院システム情報学研究科教授

聞き手: 米原丈博 よねはら たけひろ 東京大学大学院総合文化研究科 CMSI分子科学拠点研究員

重点課題の概要

米原 現実の化学現象を予測、理解し、その 制御につなげることをめざす理論分子科学の 研究では、(1) 現実的なサイズの分子系・物 質系への適用が可能で、(2) 簡便性と高精度 な予測性を備えた計算手法の開発はきわめ て重要です。実験に対し理論側が信頼性の あるレファレンスデータを提供するという大きな 意義をもっています。電子状態を主体とする 理論物質科学においては、電子相関と呼ば れる電子同士の多体相関の記述が定量予 測の鍵になります。まず、重点課題について のご紹介をお願いします。

天能 重点課題の目的は、「京」コンピュータ でなければ解けない問題にチャレンジし、社会 的にも意義の大きな研究成果をあげることで す。ガウス型基底関数を使う分子の電子状 態計算のコードは非常に複雑で、「京」を使い こなすだけでもさまざまな技術が必要です。 現在、F12理論が超並列実装され、ナノ炭素 材料などのプロダクションランが行われていま すが、ミッションの後半にかけては、有機ELや 人工光合成での励起状態を含む材料設計 や、希土類の代替物探索を可能にすることに よって、他部会への学問の流れをつくることが 重要だと考えています。

06



IDipp-C₆₀のF12計算。福井謙一記念センターの永瀬 茂教授との共同研究。

*原 重点課題のテーマを掲げられた経緯 について教えてください。

天能 物質設計などの応用分野で主に用い られてきたのは密度汎関数法ですが、物理的 に欠けているところがたくさんあります。分子 科学分野で発展してきた摂動論や結合クラス タ理論を「京」コンピュータで走らせることによ り、これまでとは本質的に異なる物質科学をめ ざせないかというのが動機です。

成果と今後の展望

米原 最近の具体的成果について、ご紹介 願えないでしょうか。天能 F12法で用いている分子求積法は超 並列計算に向いており、これまでハイブリッド 並列化を進めてきました。これにより、数十万 CPUコアでも非常に高い実行効率を引き出 すことができるようになりました。また、分子軌 道計算に不可欠な積分の実行効率が問題 でしたが、これも求積法を用いたコードの SIMD化を行い、有用な計算手法に発展させ ています。

米原 化学においては、電子状態を含む分 子構造に関する正確な知見に加え、しばしば、 反応動力学の微視的情報も求められます。 ご自身の研究技法を反応動力学に適用してい くことの可能性、その際の課題、解決のイメー ジ等について、お聞かせ願えないでしょうか。

天能 低励起状態に関しては、ポテンシャル 面と非断熱結合の行列要素を注意深く計算 することにより、何が起こっているかを知ること がおおよそ可能です。それを「見てきたかの ように」定量化するためには反応動力学が必 要ですが、一般に興味深い現象は多自由度 ダイナミクスであるので、電子状態計算とは分 離することができないと考えられます。動力 学の技術が電子状態理論に取り入れられる 発展が望ましいと思います。

計算物質科学の魅力

米原 若い世代(大学生や大学院生)に向

有機伝導体の結晶構造と分子間相互作用を大規模計算で求める



大西裕也 おおにし ゆうや 神戸大学大学院システム情報学研究科

け、分子科学や計算物質科学の魅力、科学 における計算機の有用性に関するアピールを お願いいたします。

天能 現実の物質科学を理論計算で予言 できること、それに向かってボトムアップでチャ レンジする研究分野であるということが魅力で す。長い間、大型計算機を使うよりも基礎理 論の発展のほうが大きなブレークスルーをもた らすと考えてきました。しかしながら、近年の 超並列計算環境のスケールを考えると、スパ コン利用は科学技術計算では大きな優位性 になってきていると思います。分子科学で発 展してきた高精度な量子化学理論と「京」コン ピュータを組み合わせることで、物質科学にお いてこれまでは見えなかった本質が今後明ら かになっていくはずです。 原子や分子に関わる化学現象の理論的 で 解明を目的とした計算化学は、高精度化と を 大規模化をめざして発展を続けており、ごく と 小さな分子ならば、精緻な実験と同等の精 度 で計算できるようになった。分子軌道法 に基づいて高精度な計算を達成するため には、高精度な理論と同時に大きな基底 関数を用意する必要がある。しかしなが ら、高精度な理論では基底関数のサイズ の5乗以上で計算コストが増大するため、 数十原子からなる分子の高精度計算は非 常に難しい。

この問題を解決するアプローチは2つ ある。1つは、より少ない基底関数で高精 度な計算を可能とする理論を開発すること である。もう1つは、超並列計算機のため の並列実装を行い、大規模分子の計算を 可能とすることである。この両者を達成し たものが、本課題で開発されている GELLANプログラムに並列実装された露 わに相関した2次の摂動論(MP2-F12 法)である。図に示したように、この新規 理論と大規模並列実装によって、フラー レンなどの巨大な分子の高精度な計算 が可能となった。

私は現在、さらなる高精度化をめざし て高次の摂動項を取り込んだ露わに相 関した電子状態理論の開発を行うと同 時に、すでに実装されているMP2-F12法 を用いて、有機伝導体として有望なフ ラーレン誘導体やポルフィリンからなる 分子性結晶の微視的構造とその決定因 子を解明する研究を行っている。

有機伝導体は分子の特性と同様に結 晶構造の制御によっても効率が向上する ことが明らかになっているが、結晶構造と 密接に関係する分子間相互作用を実験 で正確に求めることは困難なため、これ を大規模計算によって正確に見積もるこ とで、より高性能な分子の設計に有用な 知見を与えたい。



新規理論の超並列実装により、有機伝導体分子 の高精度計算が可能になった。



9

重点研究員のアプローチ

物性物理における代表的なシミュレーション手法

- 密度汎関数法 (density functional theory)
 - ・経験的なパラメタを含まない:「第一原理計算」
 - •相関・ゆらぎが強い場合には破綻
- ・モデル計算
 - ・有効模型(ハイゼンベルグ模型など)に対する計算手法
 - 相関・ゆらぎの効果を正確に取り入れる
 - •数值対角化(厳密対角化) (ED)
 - ・古典/量子モンテカルロ法 (MC/QMC)
 - 密度行列くりこみ群 (DMRG)
 - 動的平均場近似 (DMFT)
- •量子化学計算、分子動力学



物質科学のアプリケーションの特徴

- ・相関の強い系の平衡状態・定常状態・アンサンブルに興味がある (1トラジェクトリの 計算だけではだめ)
- ・シミュレーションする系の次元は3次元に限らない。量子的な相関など、空間的に局 所的であるとも限らない
- ・遠くの相関を取り込む/平衡状態にたどりつくための工夫として、非局所的な操作/演算が多くの場合必要
- ・メモリバンド幅を要求するアプリケーションが多い
- ・大域通信・バタフライ型通信など高次元ネットワークを要求するものも多い
- ・少数のコミュニティーコードではなく、研究グループ毎に多数のコードが存在
 → 手法・アルゴリズムの開発から応用までのサイクルが短い

数值対角化 (厳密対角化)

- ・有限の大きさの系のハミルトニアンを行列の形で書き下し、数値的に対角化
- ・例:ハイゼンベルグ模型

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle j,k \rangle} \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_k = J \sum_{\langle j,k \rangle} \left[S_j^z S_k^z + \frac{1}{2} (S_j^+ S_k^- + S_j^- S_k^+) \right]$$

- ・スピン数 N ⇒ 行列のサイズ (2S+1)^N x (2S+1)^N
- ・例:S=1/2, N=20 ⇒ 行列のサイズ 1048576 x 1048576 ⇒ メモリ 8TB
- どうやって対角化するか
 - ・完全対角化:Householder法 (三重対角化) + QR分解など (LAPACKなどを使う)
 - ・計算量が行列の次元の3乗に比例
 - ・スピンを1つ増やすと、次元は2倍、メモリは4倍、計算時間は8倍!

数値対角化における計算上の工夫

・行列のサイズを小さくする

- ・保存量(ハミルトニアンと可換な量)を使う (total momentam, total S, etc)
- ・ハミルトニアンは保存量毎にブロック対角化。それぞれを独立に対角化
- •例: total Sz ⇒ N=20の系で total Sz=0の部分空間の次元

$$_{20}C_{10} = \frac{20!}{10! \, 10!} = 184\,756 \ll 2^{20} = 1\,048\,576$$

- ・全固有値・固有ベクトルではなく、基底状態と低励起状態だけを求める
 - ・ハミルトニアン行列はかなり「疎」(1行/1列の非零要素の数~ボンド数)
 - ・べき乗法の利用: $\mathcal{H}^n v \to \Psi_0$ (絶対値最大の固有ベクトルに収束)
 - ・ 行列の非零要素のみ保存、あるいは行列要素をその場で計算
 - ・べき乗法の改良:Lanczos法、CG (共役勾配)法

超大規模数値対角化の例 (Nakano et al 2013)

• (歪んだ)三角格子 S=1 反強磁性ハイゼンベルグ模型

・N=27 ⇒ 次元 712 070 156 203 ⇒ メモリ15TB (情報基盤センター FX10 4400ノード)



乱数を用いた数値計算手法

- ・確率の計算
- ・ 自然過程の再現
- ・乱択アルゴリズム (randomized algorithm)
 - ・モンテカルロ法 (サンプリング、数値積分)
 - ・乱択グラフアルゴリズム
 - ・乱択ソーティング
 - ・機械学習 (ベイズ推定)
- ・常に正解が得られるわけではない。繰り返しにより少しづつ正確になっていく
- 物性物理、素粒子物理、化学、生物、医学、統計、バイオインフォマティクス、金融
 分野など、あらゆる分野で用いられている



from SIAM News, Volume 33, Number 4

The Best of the 20th Century: Editors Name Top 10 Algorithms

By Barry A. Cipra

Algos is the Greek word for pain. *Algor* is Latin, to be cold. Neither is the root for *algorithm*, which stems instead from al-Khwarizmi, the name of the ninth-century Arab scholar whose book *al-jabr wa'l muqabalah* devolved into today's high school algebra textbooks. Al-Khwarizmi stressed the importance of methodical procedures for solving problems. Were he around today, he'd no doubt be impressed by the advances in his eponymous approach.

Some of the very best algorithms of the computer age are highlighted in the January/February 2000 issue of *Computing in Science & Engineering*, a joint publication of the American Institute of Physics and the IEEE Computer Society. Guest editors Jack Don-garra of the University of Tennessee and Oak Ridge National Laboratory and Fran-cis Sullivan of the Center for Comput-ing Sciences at the Institute for Defense Analyses put togeth-er a list they call the "Top Ten Algorithms of the Century."

"We tried to assemble the 10 al-gorithms with the greatest influence on the development and practice of science and engineering in the 20th century," Dongarra and Sullivan write. As with any top-10 list, their selections—and non-selections—are bound to be controversial, they acknowledge. When it comes to picking the algorithmic best, there seems to be no best algorithm.

Without further ado, here's the CiSE top-10 list, in chronological order. (Dates and names associated with the algorithms should be read as first-order approximations. Most algorithms take shape over time, with many contributors.)

1946: John von Neumann, Stan Ulam, and Nick Metropolis, all at the Los Alamos Scientific Laboratory, cook up the Metropolis algorithm, also known as the **Monte Carlo method**.

The Metropolis algorithm aims to obtain approximate solutions to numerical problems with unmanageably many degrees of freedom and to combinatorial problems of factorial size, by mimicking a random process. Given the digital computer's reputation for

deterministic calculation, it's fitting that one of its earliest applications was the generation of random numbers.



http://www.siam.org/news/news.php?id=637

• Other algorithms:

Quicksort, fast Fourier transform (FFT), QR algorithm, Krylov subspace iteration methods, simplex method for linear programming, Fortran optimizing compiler, etc

Buffon の針

- ・等間隔 b で線が描かれた床の上に長さ a の針をばらまく (ただし a < b とする)
- ・線に針がかかる確率は?



W. Krauth (2006)

Buffon の針 (つづき)

- ・最も近い線から、針の中心までの距離 x は 0 ~ b/2 に均一に分布
- ・中心のまわりの針の角度 φ は 0 ~ π/2 に均一に分布
 - $x < (a/2)\cos\phi$ ならば、針は線にかかる $N_{
 m hits}(x,\phi) = 1$

$$P = \frac{\int_0^{b/2} dx \int_0^{\pi/2} d\phi N_{\text{hits}}(x,\phi)}{\int_0^{b/2} dx \int_0^{\pi/2} d\phi} = \frac{a}{b} \cdot \frac{2}{\pi}$$



• この確率過程を計算機中でシミュレーションすれば、円周率が求まる!

・モンテカルロ積分、モンテカルロ・サンプリング

乱数によるサンプリング – モンテカルロ法

a = b = 1のとき

```
import math

import random

success = 0

for i in range(10000):

x = 0.5 * random.random()

phi = (math.pi/2) * random.random()

if (x < 0.5 * math.cos(phi)):

success += 1

print i, success / float(i+1)
```



乱数を用いたグラフアルゴリズム – 最小カット問題

- ・「最小カット (min-cut)」= 連結グラフを二つの部分に分けるために切らなければな らない辺(エッジ)の集合のうち、もっとも小さいもの
 - ・右の図では {(3,5), (4,5)}
- "Randomized Min-Cut Algorithm"
 - ・ランダムに辺を一つ選ぶ
 - ・辺の両端の頂点を一つにつぶす (自己ループは取り除く)
- \dot{f}_{2} \dot{f}_{3} \dot{f}_{2} $\dot{f}_{1,3,4}$ $\dot{f}_{1,2,3,4}$ $\dot{f}_{1,2,3,4,5}$ $\dot{f}_{2,3,4,5}$ $\dot{f}_{2,3,4,5}$ $\dot{f}_{2,3,4,5}$ $\dot{f}_{2,3,4,5}$
- ・ 残りの 頂点が二つになるまで繰り返す
- ・上の試行を何回も繰り返して、得られたうちで最小なカットを結果とする
- ・頂点の数が n のグラフに関して、正解が得られる確率:少なくとも $\frac{2}{n(n-1)}$

ベイズ推定に基づく画像修復



Tanaka (2004)

モンテカルロ法で求めた、世界で一番難しい数独

arXiv.org > cond-mat > arXiv:1303.1886		Search or Article-id	(Help Advanced search All papers	
Condensed Matter > Statistical Mechanics		Dow	Download: • PDF • PostScript • Other formats	
Difficult Sudoku Puzzles Created by Replica Exchange Monte Carlo Method		nge • PDF • Post • Oth		
Hiroshi Watanabe (Submitted on 8 Mar 2013 (v1), last revised 11 Mar 2013 (this version, v2))		Curren cond-n < prev	Current browse context: cond-mat.stat-mech < prev next >	
An algorithm describing d energy of the simultaneou	n to create difficult Sudoku puzzles is proposed. An Ising spin-glass like Ham lifficulty of puzzles is defined, and difficult puzzles are created by minimizing the Hamiltonian. We adopt the replica exchange Monte Carlo method with the search lower energy states efficiently, and we set	new re g the Chang cond-m	new recent 1303 Change to browse by: cond-mat	
in creating a knowledge.	a puzzle which is the world hardest ever created in our definition, to our best (Added on Mar. 11, the created puzzle can be solved easily by hand. Our defi	nition NAS	nces & Citations	
of the difficulty is inappropriate.) Comments: 6 pages, 5 figures. Remarks were added		Bookn	nark (what is this?) 🛯 🛃 📊 🚽 🐏 👾 🗱	
Subjects: Sta	itistical Mechanics (cond-mat.stat-mech)			
Cite as: arX	(iv:1303.1886 [cond-mat.stat-mech]			

Submission history

From: Hiroshi Watanabe [view email] [v1] Fri, 8 Mar 2013 05:28:32 GMT (21kb) [v2] Mon, 11 Mar 2013 05:22:55 GMT (21kb)

(or arXiv:1303.1886v2 [cond-mat.stat-mech] for this version)

Spin ladder material Na₂Fe₂(C₂O₄)₃(H₂O)₂

- Fe²⁺ ions in octahedral crystal field
 ⇒ effective S=1 spins at low T
- Fitting experimental data by QMC results for several theoretical models (ladders, dimers, etc)



Yamaguchi, Kimura, Honda, Okunishi , Todo, Kindo, Hagiwara (2009)

(a)

(b)

Orbital ordering in eg orbital systems

- Mott insulators with partially filled d-shells
- Non-trivial interplay of charge, spin, and orbital degrees of freedom



• Effective Hamiltonian for orbital degrees of freedom (120° model)

$$H_{120} = -\sum_{i,\gamma=x,y} \frac{1}{4} \left[J_z T_i^z T_{i+\gamma}^z + 3J_x T_i^x T_{i+\gamma}^x + \sqrt{3} J_{\text{mix}} (T_i^z T_{i+\gamma}^x + T_i^x T_{i+\gamma}^z) \right] - \sum_i J_z T_i^z T_{i+z}^z$$



van Rynbach, Todo, Trebst (2010)

Supersolid in extended Bose-Hubbard model

Interacting soft-core bosons

$$\mathcal{H} = -t\sum_{\langle ij\rangle} \left(a_i^{\dagger}a_j + a_i a_j^{\dagger}\right) + V\sum_{\langle ij\rangle} n_i n_j + \frac{1}{2}U\sum_i n_i (n_i - 1) - \mu \sum_i n_i, \quad i \in \mathbb{N}$$

- Supersolid = co-existence of diagonal long-range order (=solid) and off-diagonal long-range order (=superfluid)
- Experimental realization: optical lattice?



http://www.uibk.ac.at/th-physik/qo



ρs

磁性体における相転移と臨界現象

- 例: 強磁性体 (磁石)
 - ・結晶中のひとつひとつの原子が小さな磁石 (スピン)
 - ・隣り同士は同じ方向を向いた方がエネルギー的に得(強磁性的相互作用)

T=0.995Tc



エネルギー利得 秩序状態 ordered state

 $T=T_c$



臨界点 critical point キューリー点 $T=1.05T_{c}$



エントロピー利得 無秩序状態 disordered state

相転移と臨界現象

・相転移点の近くでは様々な物理量(比熱、磁化)が異常を示す(臨界現象)



- 小さな系ではなめらかに変化する ⇒ 相転移や秩序状態は非常にたくさんの原子
 (~アボガドロ数) が集ってはじめて現われる!
- ・スーパーコンピュータによる大規模シミュレーションが必要

強磁性体のモデル化

イジング (Ising) 模型



・物理量の期待値の計算(例:磁化)

$$m = \frac{\operatorname{Tr} \sigma_i \exp[-\mathcal{H}/kT]}{\operatorname{Tr} \exp[-\mathcal{H}/kT]}$$

・単純立方格子(一辺の長さ 5)



スピン数 125 → 2¹²⁵ ≈ 10³⁸ の和

- ・期待値の計算にかかる時間
 10³⁸÷(10¹⁶/sec)≈300兆年
- ・モンテカルロ法 配位空間の中から10⁴~10⁷ 程度をラン ダムにサンプルすることにより期待値 を効率良く評価
 - → 重みつきサンプリング

Markov chain Monte Carlo

THE JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS

VOLUME 21, NUMBER 6

JUNE, 1953

Equation of State Calculations by Fast Computing Machines

NICHOLAS METROPOLIS, ARIANNA W. ROSENBLUTH, MARSHALL N. ROSENBLUTH, AND AUGUSTA H. TELLER, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico

AND

EDWARD TELLER,* Department of Physics, University of Chicago, Chicago, Illinois (Received March 6, 1953)

A general method, suitable for fast computing machines, for investigating such properties as equations of state for substances consisting of interacting individual molecules is described. The method consists of a modified Monte Carlo integration over configuration space. Results for the two-dimensional rigid-sphere system have been obtained on the Los Alamos MANIAC and are presented here. These results are compared to the free volume equation of state and to a four-term virial coefficient expansion.







Metropolis, Rosenbluth, Rosenbluth, Teller, Teller, JCP 21, 1087 (1953)

イジング模型に対するマルコフ連鎖モンテカルロ

メトロポリス法 Metropolis

```
for (int m = 0; m < total_mcs; ++m) { // loop over Monte Carlo steps
for (int s = 0; s < num_sites; ++s) { // loop over lattice sites
double delta = 0;
for (int j = 0; j < num_neighbors; ++j) {
    int v = neighbor(s, j);
    delta += 2 * J * spin[s] * spin[v]; // calculate energy difference
    }
    if (random() < exp(-beta * delta)) // accept/reject trial configuation
        spin[s] = -1 * spin[s];
}
// measure physical quantities
}</pre>
```

```
熱浴法 heat bath
```

```
if (random() < (1 + tanh(-beta * delta / 2)) / 2)
    spin[s] = -1 * spin[s];</pre>
```

円周率の計算

・円周率を与える公式

$$\pi = \lim_{c \to \infty} \int_0^c f(x) \, dx \qquad f(x) = \frac{2}{\cosh x}$$

スタンダードな数値積分法



- ・台形公式 (一次式補間), シンプソン公式 (二次式補間), etc
- カットオフcの値

• 誤差
$$\delta = \int_c^\infty \frac{2}{\cosh x} \, dx < \int_c^\infty 4e^{-x} \, dx = 4e^{-c}$$

・例えば c = 20 で誤差は 8.3 x 10⁻⁹ 以下

単純サンプリング (1) (random sampling)

- •[0,c] と [0,2] の一様分布から二次元上 の点 (x,y) を M 組生成
- ・f(x) の下に入った数 N をカウント

$$\pi \simeq 2c \times \frac{N}{M}$$

М	平均值	誤差
100	4.8	1.3
10000	3.12	0.11
1000000	3.154	0.011
100000000	3.1396	0.0011



統計誤差の評価

このモンテカルロ積分が実際に評価している積分

$$\int_{0}^{c} \int_{0}^{2} \theta(x, y) \frac{dx \, dy}{2c} \qquad \theta(x, y) = \begin{cases} 2c & \text{if } y < f(x) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \\ \text{失敗} \end{cases}$$

•統計誤差の評価

- ・試行の成功確率(success probability) $q \simeq \frac{\pi}{2c}$
- ・一回の試行の平均値(mean) $\mu = 2c \times q + 0 \times (1 q) \simeq \pi$
- 分散(variance) $s^2 = (2c)^2 \cdot q + 0^2 \cdot (1-q) \mu^2 = 2c\pi \pi^2 = 4c^2q(1-q)$

・c=20 の時

$$q \simeq 0.0785 \quad s^2 \simeq 116$$

統計誤差の評価

• M 回の試行のうち N 回成功する確率 (π の見積もり値が m=2cN/M となる確率)

$$p(m = 2c\frac{N}{M}) = \frac{M!}{N!(M-N)!}q^{N}(1-q)^{M-N} \quad \Box \bar{q} \, \beta \, \bar{n}$$

• 両辺の対数をとってスターリングの公式を使う

$$\log p(m) \simeq \frac{M}{2c} \left(m \log \frac{\pi}{m} + (2c - m) \log \frac{2c - \pi}{2c - m} \right)$$

• m に関して平均値 π の周りで二次まで展開

$$\log p(m) \simeq -\frac{M}{2s^2}(m-\pi)^2 + \mathcal{O}((m-\pi)^3)$$

・分散 $\sigma^2 = \frac{s^2}{M}$ の正規分布 (中心極限定理 central limiting theorem)

・統計誤差は √M に反比例して減少 → 1桁小さくするには100倍の計算が必要

円周率の計算の世界記録 (2009年 筑波大)

- 2兆5769億桁 (95 Tera Flops 74時間)
- ・同じ精度をモンテカルロ積分で実現するためには $M \sim 100^{10^{12}}$
- ・全然無理なので精度10桁に妥協する $M \sim 100^{10}$
- ・現在世界一の「京コンピュータ」(ピーク性能 10 Peta Flops)で仮に 10 浮動数演算で 1 サンプル生成できるとしても

$$\frac{100^{10} \times 10}{10^{16}} \text{ sec} = 10^5 \text{ sec} = 28 \text{ hour}$$

- 一方で、実は 17 分の計算で 9 桁, 10秒の計算で 8 桁 (パソコンで 1 分の計算で 5 桁)
 の精度が得られている
- ・√M の立ち上がりは非常に速い

円周率の計算の世界記録 (2011年 会社員 近藤さん)

- ・「長野男性、円周率で10兆桁達成 自作パソコンで」(共同通信 2011/10/16)
- ・同じ精度をモンテカルロ積分で実現するためには $M \sim 100^{10^{13}}$
- ・全然無理なので精度10桁に妥協する $M \sim 100^{10}$
- ・現在世界一の「京コンピュータ」(ピーク性能 10 Peta Flops)で仮に 10 浮動数演算で
 1 サンプル生成できるとしても

$$\frac{100^{10} \times 10}{10^{16}} \text{ sec} = 10^5 \text{ sec} = 28 \text{ hour}$$

- 一方で、実は 17 分の計算で 9 桁, 10秒の計算で 8 桁 (パソコンで 1 分の計算で 5 桁)
 の精度が得られている
- ・√M の立ち上がりは非常に速い

単純サンプリング (2)



再び統計誤差の評価

・関数 f(x)/p(x) の分散

$$s^{2} = \int_{0}^{c} \left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)^{2} p(x) \, dx - \pi^{2} \simeq c \int_{0}^{\infty} f^{2}(x) \, dx - \pi^{2} = 4c - \pi^{2}$$

- ・c=20 のとき $s^2\simeq 70.1$
- ・同じ試行回数 M の時, 誤差は √(70.1/116) = 0.77 倍
- ・もしくは M を 116/70.1 = 1.65 倍したのと同じ効果
- ・ 積分次元は低ければ低いほど良い

次元の呪い (curse of dimensionality)

・n次元超立方体(1辺の長さ 2, 体積 2ⁿ)に対するn次元単位球の体積の割合

$$q = \frac{\pi^{n/2} / \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}{2^n} \sim (\pi/n)^{n/2}$$

n=10 で 0.2%, n=20 で 10⁻⁸, n=100 で 10⁻⁷⁰

モンテカルロ積分で球の体積を計算しようとすると、標準偏差に対する平均値の割合は指数関数的に小さい

$$\frac{q}{\sqrt{q(1-q)}} \sim \sqrt{q}$$

- ・次元が高くなるにつれて指数関数的に大きな M が必要となる
- ・c.f. 通常の数値積分(台形公式等)でも同様

重点的サンプリング

- •(平均値が同じなら)被積分関数の分散が小さければ小さいほど良い (= 統計誤差が小さい)
- ・サンプリングの分布 p(x) の形が f(x) に近い程良い
- •f(x)の値が大きい所をより頻繁にサンプリング
 - ・重点的サンプリング (importance sampling)

重点的サンプリング (importance sampling)

>

・積分への寄与が大きな箇所を より重点的にサンプリング

$$p(x) = e^{-x}$$

М	平均值	誤差
100	3.06	0.06
10000	3.142	0.006
1000000	3.1412	0.0006
10000000	3.14164	0.00006



統計誤差のサンプル数依存性

・関数 f(x)/p(x) の分散

$$s^{2} = \int_{0}^{c} \left(\frac{f(x)}{p(x)}\right)^{2} p(x) \, dx - \pi^{2} \simeq 2(2+\pi) - \pi^{2} = 0.414$$

error

•同じ試行回数 M の時, 誤差は

√(0.414/116) = 0.06 倍

・もしくは M を 280 倍したのと同じ



重点的サンプリング

- ・理想的には p(x) を f(x) に比例するように取れば良い
- ・このとき f(x) / p(x) は定数(分散 0)

→ 1回のサンプリングで厳密な結果が得られる???

・実際には p(x) が確率密度となるように規格化条件

$$p(x) dx = c \int f(x) dx = 1$$

から定数 c を決めておく必要あり

•c は今欲しい答そのもの!

- ・モンテカルロ法で少し(数秒~1日?)計算してみて統計誤差が大きすぎる場合、それ以 上がんばってもあまり意味のある結果は得られない
 - ・1年計算しても統計誤差は1/10になるだけ
 - ・無闇にMを大きくするより、M-1/2の前の係数を小さくすることを考える
 - 積分の次元を下げる
 - 重点的サンプリングで被積分関数の分散を小さくする
- マルコフ連鎖モンテカルロ

・モンテカルロ積分からモンテカルロ平均へ $\frac{\int f(x)p(x) dx}{\int p(x) dx}$

- ・直前の状態から次の状態を確率的に生成(サンプル間の相関が生じる)
- ・任意の次元・分布(関数)に従う乱数(状態)の生成
- ただし正規化定数を知ることは難しい

強相関系における緩和問題

・相転移点の近傍



integrated autocorrelation time 1e+06 $\tau_{\rm int}(L = 1024) \simeq 2.5 \times 10^5$ 100000 10000 $\tau_{\rm int}$ 1000 $au_{
m int} \sim 1$ 100 10 10 100 1000 L

- ・ドメイン壁のダイナミクス
- 乱れた系における遅い緩和

・緩和時間が系のサイズとともに発散

緩和時間を短くする試み

- ・ 遷移確率のテーブルを最適化する
 - ・棄却率の最小化アルゴリズム [Suwa-Todo (2010)]
- ・拡張アンサンブル法
 - アンブレラサンプリング、レプリカ交換法、
 マルチカノニカル法
- ・ 非局所的な更新の導入



- ・確率過程そのものは変えずに、計算時間を短くする
 - 並列化 [Todo-Matsuo-Shitara (2013)]
 - 長距離相互作用系に対するオーダーN法 [Fukui-Todo (2009)]



Quantum Mechanics in a Nutshell

- ・共役な物理量(例: 粒子の位置と運動量)を同時に正確に測定することはできない
 不確定性原理 (Uncertainty Principle)
- ・エネルギー状態は量子化(離散化)される
- ・物質の状態は波動関数 (wave function) により確率的に表現される
- ・全ての物理量(位置、運動量、etc)は単なる数(c-数)ではなく、演算子(or 行列) (q-数)
- ・ \hat{p} と \hat{x} は基底の取り方によりその具体的な形は変わる
- ・ \hat{x} がc-数(対角)となる表示を取ると

$$\hat{x} = x$$
 $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

・ \hat{p} と \hat{x} は非可換

$$(\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x})f(x) = -i\hbar x \frac{df}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx}(xf(x)) = i\hbar f(x) \qquad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

・波動関数はシュレディンガー方程式に従う $\hat{H}\Psi = E\Psi$

量子調和振動子

・ハミルトニアン

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{K} + \hat{V} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{k\hat{x}^2}{2}$$

• シュレディンガー方程式

$$(-i\hbar\frac{d^2}{dx^2} + \frac{kx^2}{2})\Psi(x) = E\Psi \qquad \omega = \sqrt{k/m}$$

固有値と固有関数
$$\Psi_n(x)$$

 $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \quad (n = 1, 2, \cdots)$

絶対零度(最低エネルギー状態)でも有限の幅を
 持って分布している (零点振動)



虚時間経路積分表示

量子1粒子

古典M粒子 (ポリマー)

「量子モンテカルロ法」とは何か?

・次の式を評価したい $\langle A \rangle = \frac{\operatorname{tr}[A \exp(-\beta \mathcal{H})]}{\operatorname{tr}[\exp(-\beta \mathcal{H})]}$

・ただし、H も A も超巨大な行列 (次元 $\sim 10^{10^6}$)

・テイラー展開の第 n 次の項を考える

$$\operatorname{tr} \mathcal{H}^n = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \cdots \sum_{i_n} \mathcal{H}_{i_1, i_2} \mathcal{H}_{i_2, i_3} \cdots \mathcal{H}_{i_n, i_1}$$

- ・この中に現われる $(10^{10^6})^n$ 個の項から確率的にサンプリング
- ・それぞれの項は、ある種の「経路」(path)を表す

連続虚時間ループアルゴリズム量子モンテカルロ法

- 虚時間経路積分により d+1 次元古典系に焼き直す (世界線表示)
- クラスター(ループ)アルゴリズムによる非局所更新 緩和は非常に速い

- 実際にプログラムの内部で行っていること
 - 指数分布に従って、一定密度で「横木」を生成
 - Union-Find アルゴリズムを使って、全てのクラスタ(ループ)を認識

ループアルゴリズムのMPI並列化

・ 世界線の配位をプロセスに分散

- ・(d+1)-次元の格子を虚時間方向に同じ「厚さ」をもつ Np 個のスライスに分割
- ・ 横木の生成は、 各プロセスで 独立に 実行可能

ループアルゴリズムのMPI並列化

・二分木アルゴリズムを用いて、クラスタ(ループ)を認識

・並列化のオーバーヘッド $(N \log N_{\rm p}) / (\frac{N\beta}{N_{\rm p}}) = N_{\rm p} \log N_{\rm p} / \beta$ (低温では無視できる)

ノード内のスレッド(OpenMP)並列化

1. ツリーのルートノードを探索

2.2つのツリーを結合

3. 新しいルートへの経路を圧縮

- ・クラスタ構造全体をロック(omp critical)する のは非常にコストがかかる
- ・ルート探索と経路圧縮は「スレッドセーフ」
- CAS (compare-and-swap)を使って非同期 wait-free 結合アルゴリズムを実装

ベンチマークテスト - ループアルゴリズム

スーパーコンピュータ京におけるウィークスケーリング

- ・並列効率: 45.6% (24576ノード)
- FLOPS:::7.6 TFLOPS (理論ピーク性能の 0.24%)
- ・MIPS: 0.164 PIPS (理論ピーク性能の 10.4%)

ピーク性能比 対 Time-to-Solution

- ・「京」全系を用いた計算:1000万スピン系の基底状態
 - → 相関長 ~ 2×10⁵、エネルギーギャップ ~ 5 × 10⁻⁵
 - → ランダムグラフ中の全ての連結成分の識別問題
 - ・頂点・辺の数 ~ 10¹³、クラスター数 ~ 10¹²
- ・Graph500の "Large" ~ "Huge" 問題サイズ(メモリ 0.14~1.1PB)に匹敵
- ・従来の局所アルゴリズムでは
 - ・並列化効率:ほぼ100% ⇔緩和時間:L²~10¹⁴
- ・非局所アルゴリズムによる並列シミュレーション
 - ・ハイブリッド並列化による高速化: ~105
 - ・ループアルゴリズムによる高速化: ~ L² ~ 10¹⁴
 - ⇒ ピーク性能比の低下を考慮に入れても実質的には 10¹⁷ の高速化

ソフトウェアの開発と普及

- ・世の中には物性物理のための様々なパッケージソフトウェアが存在する
 - •有償:Gaussian、VASP、WIEN2k、、
 - ・無償:GAMESS、Quantum ESPRESSO、ABINIT、Amber、Gromacs、ALPS、、
- 日本国内でも数多くの高性能なソフトが開発・公開されている
 - ・小さなグループでこつこつと開発しているソフトが多い
 - ・知名度は高くない
 - ・ドキュメント、宣伝、ユーザインタフェース、ユーザサポートなどの問題
- ・開発者から見ると
 - ・ソフトを開発・公開しただけでは成果にならない(職がない)
 - ・ドキュメント作成やユーザサポートには時間も手間もかかる
 - ・海外の大規模なソフトに対抗するのはしんどい

ALPS プロジェクト

- http://alps.comp-phys.org/
- ・量子格子模型(量子スピン系、電子系)のための並列シミュレーションソフトウェアパッケージの開発
- ・開発物(ライブラリ・アプリケーション)をフリーウェアとして公開
- ・様々な模型に対する様々なシミュレー ションアルゴリズムの入力・計算結果を XML 形式で統一的に入出力可能に

The ALPS project

ALPS = Algorithms and Libraries for Physics Simulations

- International collaboration for developing open-source softwares for simulation of quantum lattice models, such as quantum spin systems, electron systems, etc
- ALPS Libraries = collection of generic C++ libraries
- ALPS Applications = collection of application packages using modern algorithms such as QMC, DMRG, ED, etc
- ALPS Framework = environment for executing large-scale parallel simulations including XML schemas, tools, scheduler, etc

Target audience

- Experimental physicists
 - Use "canned codes" to model materials
 - Determine microscopic parameters by fitting experimental data to simulations
- Theoretical physicists
 - Quick check of theoretical ideas using many modern algorithms
 - Monte Carlo, Diagonalization, DMRG, ...
 - Also useful for debugging
 - Libraries simplify and accelerate code development

ALPS libraries and applications

tools	XML manipulation GUI database		
applications	MC Q	MC ED DMRG	
domain-specific libraries	lattice model observables scheduler		
numerics	random ublas Boost library	iterative eigenvalue solver	
generic C++	graph	serialization XML/XSLT	
C / Fortran	BLAS	LAPACK MPI	

ALPS Lattice XML

periodic chain with length L

<LATTICE name="chain lattice" dimension="1"> <BASIS><VECTOR> 1 </VECTOR></BASIS> </LATTICE>

Model XML for describing Hamiltonian

XXZ spin model with two types of bonds (e.g. nearest and next nearest neighbor interactions)

```
<HAMILTONIAN name="spin">
 <PARAMETER name="Jz" default="J"/>
 <PARAMETER name="Jxy" default="J"/>
 <PARAMETER name="J" default="1"/>
 <PARAMETER name="Jz'" default="J'"/>
 <PARAMETER name="Jxy'" default="J'"/>
 <PARAMETER name="J" default="0"/>
 <PARAMETER name="h" default="0"/>
 <BASIS ref="spin"/>
 <SITETERM site="i"> -h * Sz(i) </SITETERM>
 <BONDTERM type="0" source="i" target="j">
  Jz * Sz(i) * Sz(j) + Jxy * (Splus(x)*Sminus(y)+Sminus(x)*Splus(y)) / 2
 </BONDTERM>
 <BONDTERM type="1" source="i" target="j">
  Jz' * Sz(i) * Sz(j) + Jxy' * (Splus(x)*Sminus(y)+Sminus(x)*Splus(y)) / 2
 </BONDTERM>
</HAMILTONIAN>
                          \mathcal{H} = \sum \left[ J_z S_i^z S_j^z + \frac{J_{xy}}{2} (S_i^+ S_j^- + S_i^- S_j^+) \right] - \sum h S_i^z
```

 $\langle i,j \rangle$

Simulations with ALPS

ALPS Version 2.1

- ・2012年5月
- 論文 JSTAT P05001 (2011)
- <u>http://alps.comp-phys.org</u>/

The ALPS project release 2.0: open source software for strongly correlated systems

B. Bauer¹ L. D. Carr² H.G. Evertz³ A. Feiguin⁴ J. Freire⁵ S. Fuchs⁶ L. Gamper¹ J. Gukelberger¹ E. Gull⁷ S. Guertler⁸ A. Hehn¹ R. Igarashi^{9,10} S. Isakov¹ D. Koop⁵ P.N. Ma¹ P. Mates^{1,5} H. Matsuo¹⁷ O. Parcollet¹² G. Pawlowski¹³ J.D. Picon¹⁴ L. Pollet^{11,1} T. Pruschke⁶ E. Santos⁵ V.W. Scarola¹⁵ U. Schollwöck¹⁶ C. Silva⁵ B. Surer¹ S. Todo^{17,10} S. Trebst¹⁸ M. Trover¹[†] M. L. Wall² P. Werner¹ S. Wessel^{19,20} ¹Theoretische Physik, ETH Zurich, 8093 Zurich, Switzerland ²Department of Physics, Colorado School of Mines, Golden, CO 80401, USA ³Institut für Theoretische Physik, Technische Universität Graz, A-8010 Graz, Austria ⁴Department of Physics and Astronomy, University of Wyoming, Laramie, Wyoming 82071. USA ⁵Scientific Computing and Imaging Institute, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA ⁶Institut für Theoretische Physik, Georg-August-Universität Göttingen, Göttingen, Germany ⁷Columbia University, New York, NY 10027, USA ⁸Bethe Center for Theoretical Phyics, Universität Bonn, Bonn, Germany ⁹Center for Computational Science & e-Systems, Japan Atomic Energy Agency, 110-0015 Tokyo, Japan ¹⁰Core Research for Evolutional Science and Technology, Japan Science and Technology Agency, 332-0012 Kawaguchi, Japan ¹¹Physics Department, Harvard University, Cambridge 02138, Massachusetts, USA ¹²Institut de Physique Theorique, CEA/DSM/IPhT-CNRS/URA 2306, CEA-Saclay, F-91191 Gif-sur-Yvette, France ¹³Faculty of Physics, A. Mickiewicz University, ul. Umultowska 85, 61-614 Poznan, Poland ¹⁴Institute of Theoretical Physics, EPF Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland ¹⁵Department of Physics, Virginia Tech, Blacksburg, Virginia 24061, USA ¹⁶Arnold Sommerfeld Center for Theoretical Physics and Center for NanoScience, University of Munich, Theresienstrasse 37, 80333 Munich, Germany ¹⁷Department of Applied Physics, University of Tokyo, 113-8656 Tokyo, Japan ¹⁸Microsoft Research, Station Q, University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA ¹⁹Institute for Solid State Theory, RWTH Aachen University, 52056 Aachen, Germany ²⁰Institut für Theoretische Physik III, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, 70550 Stuttgart, Germany

http://www.iop.org/EJ/abstract/1742-5468/2011/05/P05001

ソフトウェアの開発と普及

- ・世の中には物性物理のための様々なパッケージソフトウェアが存在する
 - •有償:Gaussian、VASP、WIEN2k、、
 - ・無償:GAMESS、Quantum ESPRESSO、ABINIT、Amber、Gromacs、ALPS、、
- 日本国内でも数多くの高性能なソフトが開発・公開されている
 - ・小さなグループでこつこつと開発しているソフトが多い
 - ・知名度は高くない
 - ・ドキュメント、宣伝、ユーザインタフェース、ユーザサポートなどの問題
- ・開発者から見ると
 - ・ソフトを開発・公開しただけでは成果にならない(職がない)
 - ・ドキュメント作成やユーザサポートには時間も手間もかかる
 - ・海外の大規模なソフトに対抗するのはしんどい

⇒ MateriApps

アプリの横断的な利用、開発を促進するWebサイト

●開発者の立場から

・開発・公開をサポート

・開発者の牛の声を届ける!

サイト活用によるメリット

●利用者の立場から

- ・利用したいアプリが見つかる!
- ・アプリの使い方をサポート!
- ・フォーラムで意見交換、疑問解消!

ゲストマ

機能

●「やりたいこと」からアプリを検索できるシステム 検索タグ:対象となる物質・模型、計算手法・アルゴリズム、 知りたい物理量・物理現象

●開発者の声を利用者に届けるアプリ紹介開発者ページの設置 (アプリ最大の魅力、アプリの将来性・応用性 etc.)

●掲示板を利用した意見交換の促進

●共同研究・開発を支えるシステム(実装予定) Web上でのバージョン管理・ソースコード開発

お問い合わせ先: ma@cms-initiative.jp

MateriAppsのソフトウェア (2013/09/28現在)

- 第一原理計算 (DFT)
 - ・計17ソフトウェア
- ・量子化学計算 (HF近似、CI法、CC法)
 - ・計4ソフトウェア
- 分子動力学法
 - ・計8ソフトウェア
- •格子模型 (QMC, DMRG, ED等)
 - ・計9ソフトウェア

・2013年度中に100以上に拡充予定

MateriApps LIVE! - http://cmsi.github.io/MateriAppsLive/

- ・USBメモリから直接ブートできる Linux システム (Debian Live)
- ・MateriAppsで紹介している公開ソフト・ツールがあらかじめインストールされている
- Windows、Mac などで利用可
- •2013年9月末 ver. 1.1 公開
 - MateriApps サイトで配布
 - ・学会・アプリ講習会でも
 配布予定

おわりに

- 物質科学におけるシミュレーションとアルゴリズム
- モンテカルロの原理と量子モンテカルロ法
 - ・アルゴリズムの発展 >> 計算機の発展
 - ・グラフアルゴリズムなどの非浮動小数点数演算の重要性
 - ・ピーク性能比 対 Time-to-Solution
- コミュニティーコード開発・普及の必要性
 - MateriApps による開発者・利用者支援